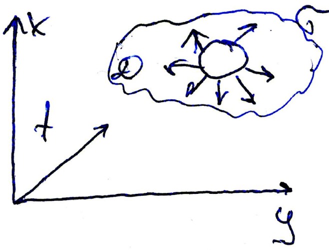
① Уравнение колебаний мембраны. Бицадзе §3, стр4.

Опр: Мембраной называют упругую мат. поверхность, которая в положении покоя имеет форму плоской области [ее потенциальная энергия в процессе колебания пропорциональна приращению ее площади].

Упругость мембраны заключается в том, что когда мгновенно прекращается внешнее воздействие, выводящее ее из положения покоя, она в течение определенного времени совершает колебательное движение.

За систему отсчета возьмем x, y и t.



Мембрана натянута на контур, к краям приложено натяжение.

Предп-м, что область D лежит в (x,y),
а профиль мембраны $u(x,y,t)$, т.е. вертикальное смещение точки $(x,y)\in D$ — достаточно гладкая функция. Также колебания мембраны будем считать малыми в том смысле, что при вычислениях пренебрежем степенями $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ выше 2ой.

В момент времени t площадь σ мембраны, выведенной из положения покоя задается формулой: $\sigma = \int_D \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dxdy \approx \int_D (1+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}u_y^2)\,dxdy$, а в положении покоя ее площадь $|D| = \int_D dxdy$, тогда для потенциальной энергии E_p имеем:

возможно $=0$, т.к. в покое нет натяжения

$$E_p = \underbrace{\left[\int_D k\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,d\sigma - \int_D k\,d\sigma \approx \int_D k(1+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}u_y^2)\,d\sigma - \int_D k\,d\sigma\right]}_{\text{Этого в Бицадзе не видел, там не } k\text{, а } \mu} = \int_D \frac{k}{2}(u_x^2+u_y^2)\,dxdy$$

коэф k — натяжение мембраны (или μ)

Кинетическая энергия: $E_k = \int_D \rho \frac{u_t^2}{2}\,dxdy$, ρ — поверхностная плотность массы(??) мембраны, а u_t — скорость смещения.

$]t_1,t_2[$ — промежуток времени наблюдения, тогда в силу принципа Гамильтона

$$\int_{t_1}^{t_2}(E_k-E_p)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}dt\int_D[\rho u_t^2 - k(u_x^2+u_y^2)]\,dxdy \quad (*):$$

— стационарный интеграл

[Что устанавливает, что для консервативных систем переход из одной точки в другую, т.о., что S(действие) принимает наим. значение. Действие — мера движения физ. системы]

$S[q_1(t), q_2(t) \ldots q_n(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1(t) \ldots q_n(t), \dot{q}_1(t) \ldots \dot{q}_n(t))dt.$

$q_{1 \ldots n}$ – обобщенные координаты

$\dot{q}$ – пр-ные => обобщ. скорости, L – лагранжиан].

В рассматриваемом примере в роли лагранжиана выступает $L(u) = \frac{1}{2}[\rho u_t^2 - \mu(u_x^2 + u_y^2)]$.

(Бицадзе (2), стр 6.)

(Лагранжиан описывает эволюцию системы)

Интеграл стационарный => (t_1, t_2) стационарный промежуток времени набл. ~~[illegible]~~ =>

=> $u(x,y,t)$ должна быть решением уравнения Эйлера вариационной задачи для интеграла (*): $\left[\begin{array}{l} J = \int_a^b F(x, f(x), f'(x))dx, \ F\text{ – лагранжиан(?)} \\ \text{Если этот функционал достигает экстремума,} \end{array}\right.$

то для нее выполняется $\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$ ур. Э-Л [т.к. ПТ => наименьшее действие]

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\mu u_y) = 0.}$$, $\mu \equiv K$ (разные обозначения просто)

Если считать $\rho, k = const$ => $\boxed{\rho u_{tt} = K\Delta u = K(u_{xx} + u_{yy})}$

$a^2 = \frac{\mu}{\rho}$ – скорость распростр. звука.

$$\Downarrow$$

В Бицадзе не было

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad a^2 = \frac{K}{\rho} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ – край закреплен} \\ \quad \text{– граница} \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y), \ u_t|_{t=0} = \psi(x,y) \end{cases}$$

Доп(?) инфа (Бицадзе 1,2):

Также: Если считать, что u не зависит от t, т.е. полагая, что ~~[illegible]~~ в положении изгиба, описанным ур-нием $u = u(x,y)$ мембрана находится в равновесии получаем $\Delta u = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$, представляя собой ур-ние Э-Л для $D(u) = \int_D (u_x^2 + u_y^2)dxdy$ – интеграл Дирихле.

② Уравнение теплопроводности Бицадзе 1, стр 37; Бицадзе 2 стр 6; §4

∃ среда, заполненная плотностью ρ; удельная теплоемкость c; коэффициент теплопроводности K.

Опишем след. образом: ∃ $u(x,t)$ – температура среды в точке x в момент времени t и $\mathcal{D}$ – произвольная область среды, содержащая x. Обозначим через S границу $\mathcal{D}$. Если ds и ν – элемент площади и внешняя нормаль

S, то при требовании достаточной гладкости ф-ии $u(x,t)$ количество тепла Q, поступающее в $\mathcal{D}$ через S за (t_1,t_2) в силу закона Фурье: $Q=\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_S K\frac{\partial u}{\partial\nu}ds$ (1)

[$Q=-K\frac{\partial u}{\partial\nu}$ – в направлении вектора $\vec\nu$, поэтому, полученное тепло с $\oplus$, фактически и есть запись з. Ф: тепло передается от более нагретой части тела к менее нагретой с $\vec\nu$ пропорц. перепаду (grad) тем-ры между частями]

Так как в рез-те поступления тепла Q приращение температура равно $u(x,t+dt)-u(x,t)=u_t\,dt$, то $Q=\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_{\mathcal{D}}c\rho u_t\,dV$, (2) dV – элем объема.

$$\Rightarrow\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_S K\frac{\partial u}{\partial\nu}dS=\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_{\mathcal{D}}c\rho u_t\,dV \quad (*)$$ при предположении, что $K,c,\rho=\text{const}$

(1) можно записать в виде $K\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_S\frac{\partial u}{\partial\nu}ds=c\rho\int\limits_{t_1}^{t_2}u_t\,dV$, в силу формулы О-Г:

$$\int\limits_S F\,ds=\int\limits_{\mathcal{D}}\operatorname{div}F\,dV\Rightarrow\int\limits_S\frac{\partial u}{\partial\nu}ds=\int\limits_{\mathcal{D}}\underbrace{\boxed{\operatorname{div}\operatorname{grad}}}_{\text{лапласиан}}u\,dV=\int\limits_{\mathcal{D}}\Delta u\,dV,$$ тогда $(*)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathcal{D}}(c\rho u_t-K\Delta u)\,dt\,dV=0\ \xRightarrow[\text{произвольны}]{(t_1,t_2)\text{ и }\mathcal{D}}\ \boxed{c\rho u_t-\Delta u=0}$$ или $\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0$, где $a^2=\frac{K}{c\rho}$.

$u_t=a^2\Delta u$ – ур-ние теплопроводности

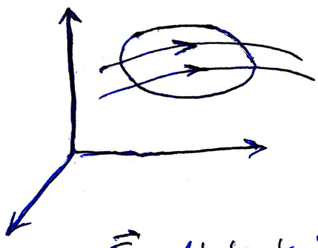
(думаю, что не надо, но пусть нет:)

Нач усл. $u(x,0)=u_0(x)$, $x\in\mathcal{D}$; $u\big|_{\partial\mathcal{D}}=0$ – на границе температура

$\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\mathcal{D}}=\psi$ – на границе тепловой поток; $K\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\mathcal{D}}=-\underset{\vee 0}{\varkappa}(u-T_0)$ – теплообмен со средой.

③ Уравнения гидродинамики, начальные и краевые условия Бицадзе 2 §6

(А еще на вм кафедралка мат. модели гидродинамики) поэтому билет оттуда.



V - фикс объем.

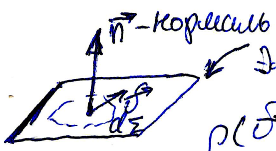
Σ - гладк. замкн граница

Масса газа в выделенном объеме опр через $\rho(t,\vec r)$

$\vec r=(x_1,x_2,x_3)$ - положение в пр-ве выделенного объема.

① $m=\int\limits_V \rho(t,\vec r)dV$; нужно узнать Δm за $\Delta t=t_2-t_1$

Изменение массы в V за Δt: $\int\limits_V \rho(t_2,\vec r)dV-\int\limits_V \rho(t_1,\vec r)dV$



$\vec n$ - нормаль

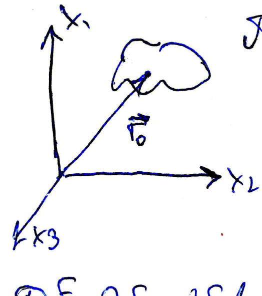
элемент поверхности (в Бицадзе dS - элем площади)

$\underbrace{\rho(\vec\upsilon,\vec n)d\Sigma}_{m} \Rightarrow \Delta m$ за $\Delta t=\int\limits_V(\rho(t_2,\vec r)-\rho(t_1,\vec r))dV=-\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Sigma \rho(\vec\upsilon,\vec n)d\Sigma dt$ - ур-ние неразрывности. По I т. о среднем $\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Sigma \rho(\vec\upsilon,\vec n)d\Sigma dt=(t_2-t_1)\int\limits_\Sigma \rho(\vec\upsilon,\vec n)d\Sigma \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_V \frac{\rho(r,t_2)-\rho(r,t_1)}{\Delta t}dV=-\int\limits_\Sigma \rho(\vec\upsilon,\vec n)d\Sigma \quad \Rightarrow \Big\{\int\limits_V \operatorname{div}\vec f dV=\int\limits_\Sigma(\vec f,\vec n)d\Sigma\Big\}$ О-Г. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\int\limits_V \operatorname{div}(\rho\vec\upsilon)dV=0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec\upsilon)=0}$ ① (Бицадзе $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\vec v=0$ (25)) скорость

(Заметим (по Бицадзе), что ур-ние нер-ти подразумевает, что изменение массы происходит только за счет внешних источников)



Подход Эйлера - следим за изменением параметров в каждой точке пр-ва.

Подход Лагранжа - следим за объемом, а не точкой.

$\underbrace{\frac{Df}{Dt}}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{пр. Эйлера по времени}}+\underbrace{(\upsilon,\nabla)f}_{\upsilon\cdot\operatorname{grad}f}$

$\Downarrow$

пр-ная Лагранжа по времени, она же субстанциональная пр-ая (Бицадзе (26)).

! Выводить уравнения гидродинамики из Навье-Стокса (***), что такое!

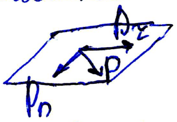
Поэтому далее без отсылок на Бицадзе - тут идиотизм].

∃ есть внешн. сила с объемной плотностью F.

Изменение кол-ва движения происходит за счет:

1) вытекание через поверхность $\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Sigma \rho(\vec r,t)\cdot(\vec v,\vec n)\,\vec v\, d\Sigma$

2) Давление внешнего части газа:



p-давление, газ идеальный $\Rightarrow p_\tau = 0$, т.к. нет трения между слоями. есть $p_n = p\vec n$.

$$\int_V \rho(\vec r,t_2)\vec v(\vec r,t_2)\,dV - \int_V \rho(\vec r,t_1)\vec v(\vec r,t_1)\,dV = -\int_{t_1}^{t_2}dt\int_\Sigma \left(\rho\vec v(\vec v,\vec n) + p\vec n\right)d\Sigma + \int_{t_1}^{t_2}dt\int_V F\,dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho v}{\partial t}\,dV = -\int_\Sigma \rho\vec v(\vec v,\vec n)\,d\Sigma - \int_\Sigma p\vec n\,d\Sigma + \int_V F\,dV \Rightarrow \int_V \frac{\partial(\rho v)}{\partial t}\,dV = -\int_\Sigma \rho v(\vec v,\vec n)\,d\Sigma - \int_\Sigma p\vec n\,d\Sigma + \int_V F\,dV$$

Спроецируем на x_i: $\int_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}\,dV = -\int_\Sigma \rho v_i(\vec v,\vec n)\,d\Sigma - \left(\int_\Sigma p\vec n\,d\Sigma\right) + \int_V F_i\,dV$

$$\int_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}\,dV = -\int_V div(\rho v_i\vec v)\,dV - \left(\int_V grad\,p\,dV\right)_{x_i} + \int_V F_i\,dV \Rightarrow \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + div(\rho v_i\vec v) + grad\,p|_{x_i} = F$$

$$\{div\,\lambda\vec v = \lambda\,div\,\vec v + (\vec v,\nabla)\lambda\} = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \underbrace{\frac{v_i\partial\rho}{\partial t} + v_i\,div(\rho\vec v)}_{=0\text{ - ур-ние нер-ти}} + (\rho\vec v,\nabla)v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = F_i \Rightarrow$$

(2)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec v}{\partial t} + (\vec v,\nabla)\vec v = -\frac{1}{\rho}grad\,p + \frac{F}{\rho}}$$ – ур-ние движения

3) Аналогично: $\int_V \rho(\vec r,t)\left(\varepsilon(\vec r,t) + \frac{v^2(\vec r,t)}{2}\right)\Big|_{t_1}^{t_2} dV = -\int_{t_1}^{t_2}dt\int_\Sigma \rho(\vec v,\vec n)\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)d\Sigma - \int_{t_1}^{t_2}dt\int_\Sigma (p\vec n,\vec v)\,d\Sigma +$

$$+\int_{t_1}^{t_2}dt\int_V (F,v)\,dV \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right) + (\vec v,\nabla)\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}div(p\vec v) + \frac{(F,v)}{\rho}}$$ – ур-ние энергии

+ ур-ния состояния $\varepsilon = \varepsilon(\rho,T)$; $p = p(\rho,T)$ Итого 5 ур-ний.
(ε – удел. энергия)

Действительно: если 1) $\rho = const \Rightarrow div\,\vec v = 0$ – жидкость несжимаема

2) $\frac{\partial\cdot}{\partial t} = 0$ – стац. течение

3) Плоское течение: $v = v(v_x, v_y, v_z = 0)$

4) $\rho\frac{D\vec v}{Dt} + grad\,p = \mu\Delta\vec v$ – Навье-Стокса лишь в частном случае (и выводится оно из ур-ния движения).

④ Классификация уравнений в частных производных Бицадзе 1 стр 15.

{Предыстория из 5 ого билета до (включительно) замечания}

В случае ур-я порядка m:

(*) $\sum a_{i_1 \dots i_n}(x) \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} + L_1(u) = f$, $\sum_{j=1}^{m} i_j = m$, где L_1 - дифф. оператор порядка ниже m. форма $K(\lambda_1 \dots \lambda_m) = \sum a_{i_1 \dots} a_{i_n} \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n}$; $\sum_{j=1}^{n} i_j = m$.

Если при фикс. значении $x \in D$ можно найти такое аффинное преобразование переменных $\lambda_i = \lambda_i(\mu_1 \dots \mu_n)$, $i = 1..n$ в результате которого полученная из (5) форма содержит лишь l, $0 < l < n$ переменных μ_i, то говорят, что ур-ние в точке x параболически вырождается.

Если $K(\lambda_1 \dots \lambda_n) \overset{(1)}{=} 0$ не имеет действительных точек, кроме $\lambda_1 = 0, \dots \lambda_n = 0$ уравнение (*) называется эллиптическим

Говорят, что ур-ние (*) в $x \in D$ гиперболично, если в пр-ве переменных $\lambda_1 \dots \lambda_n$ ∃ прямая l, что если ее принять за коорд. ось в новых переменных $\mu_1 \dots \mu_n$, полученных преобразованием $\lambda_1 \dots \lambda_n$, то относительно координаты, меняющейся вдоль этой оси, преобразованное ур-ние (1) имеет ровно m действ. корней

какая-то дичь из Бицадзе.

Бонус к билету №5: ① $\Delta u = 0$, $Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ - эллиптично всюду в E_n

② $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ волновое ур-ние (колебание струны); $Q = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 - \lambda_n^2$ - гиперболично всюду в E_n.

③ $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$ ур. тепл-ти; $Q = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2$ - параболическое.

P.S: сорян за перестановку начала в билетах. В Бицадзе все не по порядку :(

Пусть $D \subset E^n$, $x=(x_1 \dots x_n)$, $n \geq 2$. В области D будем р-ть $F(x, \dots p_{i_1 \dots i_n} \dots)$ – заданная действительная функция для $\forall x \in D$ и действительных переменных $p_{i_1 \dots i_n}$ с $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$, $k = 0 \dots m$, $m \geq 1$ – порядок ур-ний; i_k неотр. целочисл.

Пусть при $i_1 + \dots + i_n = m$ $\exists$ хотя бы 1 ненулевой элемент $\frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \dots i_n}}$, $\sum_{j=1}^{n} i_j = m$.

Тогда $F\left(x, \dots \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}\right) = 0$ (1) – ур-е порядка k (в общем виде)

Опр: $u(x)$ – (регулярное) решение уравнения, если u определена в области D и непрерывна со своими частными производными, входящими в это уравнение, и обращает его в тождество.

Говорят, что (1) линейно, если F – линейная ф-ия относ $p_{i_1} \dots p_{i_n}$, $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$, $k = 0 \dots m$

Если F – линейна лишь относительно $p_{i_1 \dots i_n}$ при $\sum_{j=1}^{n} i_j = m$ (то есть самой старшей производной), то (1) – квазилинейно.

$\sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1 \dots i_m} A^k_{i_1 \dots i_n}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = f(x)$ – линейное ур-ние порядка m, (Билеты, не Бицадзе) если $f(x) = 0$, то однородное

Замечание: если $u(x)$ и $v(x)$ – реш. неод. лин. ур-ния $Lu = f$, то их разность $w = u(x) - v(x)$ будет решением однородного $Lw = 0$. Кроме того, если $u_k(x)$, $k = 1 \dots l$ – решения однородного ур-ния, то решением этого уравнения является и функция $u = \sum_{k=1}^{l} c_k u_k(x)$, c_k – действ. постоянные.

Линейное уравнение 2-го порядка с частными производными можно записать:

(*) $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f$, где A_{ij}, B_j, C, f – заданы в области D.

В точках $x \in D$, где A_{ij}, $i,j = 1 \dots n$ все равны нулю перестает быть ур-нием 2-го пор.

Ур-нию (*) сопоставим квадратичную форму $Q(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j$

В каждой точке $x \in D$ квадратичная форма Q при помощи неособого (???) аффинного преобразования $\lambda_i = \lambda_i(\mu_1 \dots \mu_n)$, $i = \overline{1 \dots n}$ может быть приведена к каноническому виду $\boxed{Q = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu_i^2}$, где α_i, $i = 1 \dots n$ принимают значения $\{-1; 1; 0\}$, на чем и строится классификация:

1) Когда все $\alpha_i = 1$ или $= -1$, т.е. форма полож или отриц. опред $\Rightarrow$ (*) эллиптическое $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (Лаплас)

$1 \leq l \leq n-1$, $\mathcal{E}_i = -1$, $(n-l) \geq 1$ – ультрагиперб.

Если $|\alpha_i| = 1$, но один отличается по знаку $\Rightarrow$ гиперболическое $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

Если есть $\alpha_k = 0$, то параболический $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0$ (ур-ние теплопровод).

если $\alpha_i = 0$, остальные одного знака, то – ультрапараболические

⑥ Формула Кирхгофа для волнового уравнения   Бицадзе стр 43

Волновое уравнение $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, & \text{при } n=3 \text{ -ур-ние акустики} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x), & \text{будем считать, что } (x,t) \equiv (x_1, x_2, x_3, t) \end{cases}$ время

$\boxed{\text{Задача Коши}}$. Докажем, что $u(x,t) = \int\limits_S \dfrac{\mu(y)}{|y-x|} dS_y$, где $|y-x|$ - расстояние между точками $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$, S - сфера, $|y-x|^2 = t^2$, а $\mu \in C^2$ по y_1, y_2, y_3, является регулярным решением $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$

Проведем замену: $\begin{cases} y_1 = x_1 + t\xi_1 \\ y_2 = x_2 + t\xi_2 \\ y_3 = x_3 + t\xi_3 \end{cases} \Rightarrow \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ - интегрирование по ед. сфере $|\xi| = 1$

$d\sigma_\xi = \dfrac{dS_y}{t^2} = \dfrac{dS_y}{|y-x|^2}$ - эл-т площади.

$$u(x,t) = \int\limits_\sigma \frac{\mu(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2, x_3+t\xi_3)}{t} t^2 d\sigma_\xi$$

Проверим, что $u(x,t)$ - решение: $\exists \mu$ имеет непр. 2-ые частные пр-ные по всем переменным

$\Delta u(x,t) = t\int\limits_\sigma \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} d\sigma_\xi$, кроме того $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \int\limits_\sigma \mu(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2, x_3+t\xi_3) d\sigma_\xi + t\int\limits_\sigma \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial \mu}{\partial y_i} \xi_i d\sigma_\xi =$

$= \dfrac{u}{t} + \dfrac{I}{t}$ (2), где $I = \int\limits_S \left[\dfrac{\partial \mu}{\partial y_1}\nu_1 + \dfrac{\partial \mu}{\partial y_2}\nu_2 + \dfrac{\partial \mu}{\partial y_3}\nu_3 \right] dS_y$, $\nu(y)$ - ед. вектор внешней нормали к S в точке y. ~~[illegible]~~ Диф-ем по t (2) получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\frac{\partial u}{\partial t}t - u}{t^2} + \frac{\frac{\partial I}{\partial t}t - I}{t^2} = \frac{\left(\frac{u}{t} + \frac{I}{t}\right)t - u}{t^2} + \frac{\partial I}{\partial t}\frac{1}{t} - \frac{I}{t^2} = \frac{\partial I}{\partial t}\frac{1}{t} \quad (3)$$

$$I = \int\limits_S \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mu}{\partial y_i} \nu_i(y) \right] dS_y = \{\text{ф-ла О-Г}\} = \iiint\limits_D \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_3^2} \right] d\tau_y.$$

интеграл по шару $|y-x|<t$

Перейдем от декартовых координат к сферическим: $\begin{cases} y_1 = r\sin\theta\sin\varphi & r\in[0,t] \\ y_2 = r\sin\theta\cos\varphi & \varphi\in[0,2\pi] \\ y_3 = r\cos\theta; & \theta\in[0,\pi] \end{cases}$

Якобиан $= r^2\sin\theta \Rightarrow I = \int\limits_0^t dr \int\limits_0^\pi d\theta \int\limits_0^{2\pi} \Delta\mu r^2 \sin\theta d\varphi;$

$\dfrac{\partial I}{\partial t} = \int\limits_0^\pi d\theta \int\limits_0^{2\pi} \Delta\mu t^2 \sin\theta d\varphi = t^2 \int\limits_\sigma \Delta\mu d\sigma_\xi$ - поверх. ед. сферы (3)

В силу (2) и (3) имеем: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = t\int\limits_\sigma \Delta\mu d\sigma_\xi = \Delta u(x,t) \Rightarrow u$ - реш. волн. ур-ния при $n=3$.

Введем обозначение $tM(\mu) = \frac{1}{4\pi} u(x,t)$, где $M(\mu) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma} \mu(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2, x_3+t\xi_3)\,d\sigma_{\xi_3}$

С учетом $d\sigma_\xi = \frac{dS_y}{t^2} = \frac{dS_y}{|y-x|^2}$: $M(\mu) = \frac{1}{4\pi t^2}\int\limits_S \mu(y)\,dS_y$. - интегральное среднее

$\mu(x_1,x_2,x_3)$ по сфере $|y-x|^2=t^2$. $\frac{\partial}{\partial t}[tM(\mu)]$ - также является рег. решением (проверяется подстановкой) при требовании, что $\mu(y_1,y_2,y_3)$ - имеет непр. пр-ные третьего порядка

Тогда $\boxed{u(x_1,x_2,x_3,t) = \underbrace{tM(\psi)}_{\text{решение}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)]}_{\text{решение}}}$ - рег. решение задачи Коши, определенной ранее

(**)

При $t=0$ имеем (проверка нач. условия)

$$u(x_1,x_2,x_3,0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\xi|=1}\varphi(x_1,x_2,x_3) = \varphi(x_1,x_2,x_3)$$

Так как $\frac{\partial u(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}[tM(\psi)] + \frac{1}{4\pi}t\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)M(\varphi)$, то

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x_1,x_2,x_3,t)\Big/_{t=0} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\xi|=1}\psi(x_1,x_2,x_3)\,d\sigma_\xi = \psi(x_1,x_2,x_3)$$

(**) $u(x,t) = tM(\psi) + \frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)]$ - формула Кирхгофа, дающая решение задачи Коши.

Физическое явление, описываемое $u(x,t)$ волнового ур-ния называется распр-нием волны, а само решение $u(x,t)$ - волной.

По ф-ле Кирхгофа решение $u(x,t)$ определяется в тех точках (x,t) пр-ва E_4, которые обладают тем свойством, что пересечение конуса K: $|y-x|^2-(\tau-t)^2=0$ с вершиной с гиперпл-ю $\tau=0 \in \mathcal{D}$. - ?? Стоит ли писать?

Поскольку $\frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)] = M(\varphi) + \frac{1}{t}\int\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_y} S_y$, где ν - внеш. нормаль к S в точку y

из формулы Кирхгофа => соотв. зад Коши опред. φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ и ψ на сфере $(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2=t^2$ с центром в (x_1,x_2,x_3), радиуса $|t|$. Этот факт в теории звука называется принципом Гюйгенса. - каждая точка фронта является вторичным источником сферических волн (поэтому $n=3$, а не 2).

7) Формула Пуассона и Даламбера для волнового уравнения.

(Бицадзе 2, стр 55; 1-155)

Формула Кирхгофа для $n=3$, переходим к $n=2$:

З. Коши: $\begin{cases} \Delta u - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$ $\quad x=(x_1,x_2)\in E^2,\ t\in E^1,\ t\neq 0$

$\varphi(x)\in C^3,\ \psi(x)\in C^2.$ $\quad$ (*)

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y|^2=t^2}\psi(x_1+y_1,x_2+y_2)\,dS_y + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{|y|^2=t^2}\varphi(x_1+y_1,x_2+y_2)\,dS_y\right]$$

Решение $u(x_1,x_2,t)$ З. Коши может быть получено из формулы Кирхгофа $\left[u(x,t) = tM(\psi) + \frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)]\right]$ методом спуска. Суть метода заключается в том, что исправление! при вычислении интеграла Кирхгофа вместо интеграла по сфере будем брать интеграл по кругу. Проекция dy_1dy_2 элемента площади dS_y сферы $|y|^2=t^2$ на круг $y_1^2+y_2^2<t^2$ выражается через dS_y формулой $dy_1dy_2 = dS_y\cos(\widehat{i_3,\vec n})$ $\vec n$ нормаль в (y_1,y_2,y_3). Поэтому учитывая, что при вычислении интегралов ~~[illegible]~~ в (*) следует спроектировать на круг $y_1^2+y_2^2<t$, как верхнюю $y_3>0$, так и нижнюю половину сферы $|y|^2=t^2$.

Эта ф-ла запишется в виде:

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|y-x|^2\le t}\frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}\,dy_1dy_2 + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|y-x|^2\le t^2}\frac{\varphi(y)}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}\,dy_1dy_2$$

Формула Пуассона

Из формулы видно, что для определения волны недостаточно знания значений $\varphi(x_1,x_2)$ и $\psi(x_1,x_2)$ на окр. $(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2=t^2$. В опр-нии $u(x_1,x_2,t)$ участвуют значения нач данных φ и ψ во всех точках круга $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ принцип Гюйгенса при $n=2$ не имеет места (т.к. там по сфере, не шару, а тут в круге)

Формулу для $\underline{n=1}$ можно получить след образом: ~~[illegible]~~ Сделаем $\exists\,\varphi$ и ψ зависят только от $x=x_1$ замену переменных в ф. П: $\eta_1 = y_1-x_1,\ \eta_2 = y_2-x_2 \Rightarrow$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-t}^{t}\psi(x+\eta_1)\,d\eta_1\cdot\int\limits_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-t}^{t}\varphi(x+\eta_1)\,d\eta_1\int\limits_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-t}^{t}\psi(x+\eta_1)\arcsin\frac{\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\Bigg|_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}d\eta_1 + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_{-t}^{t}\varphi(x+\eta_1)\arcsin\frac{\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\Bigg|_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}d\eta_1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-t}^{t}\psi(x+\eta_1)\,d\eta_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-t}^{t}\varphi(x+\eta_1)\,d\eta_1 = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)-\varphi(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau = u(x,t)$$

Формула Даламбера.

Мн-во точек пр-ва E_n, по заданным значениям функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, на которых определяется значение решения $u(x,t)$ волнового ур-ния; в т. (x,t) пр-ва E_{n+1} называется областью зависимости для т. (x,t)
з. Коши.

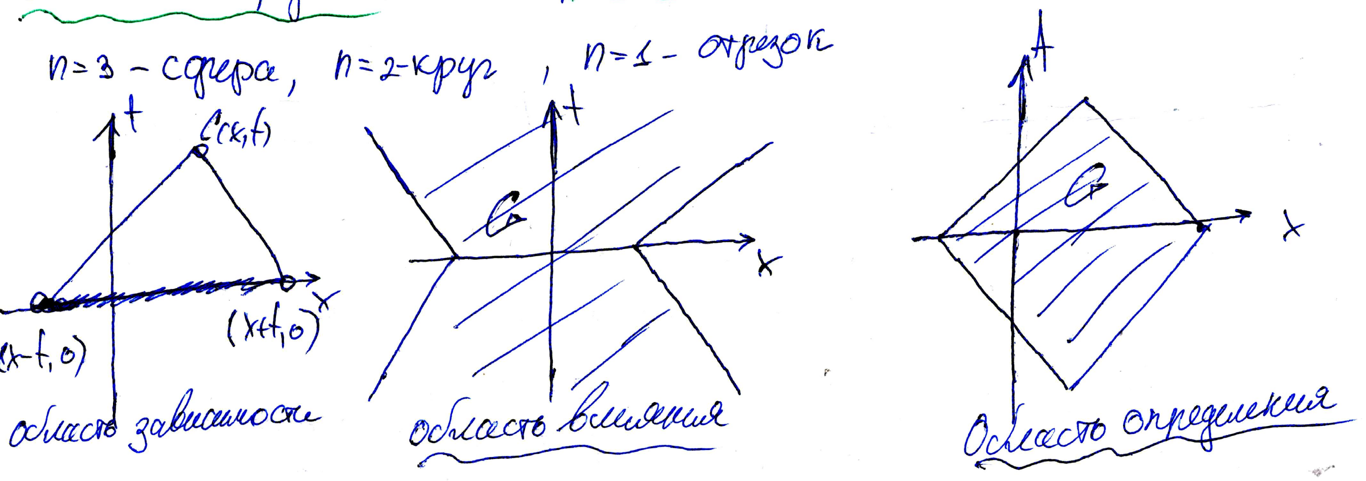
$n=3$ - область по принципу Гюйгенса - сфера
$n=2$ - круг
$n=1$ - сегмент

(Не факт, что надо)

$\exists$ теперь носителем нач. данных является не все пр-во E_n, а некоторая его область G, т.е. $u(x,0)=\varphi(x)$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\psi(x)$, $t=0$, $x\in G$. Значения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на G влияют на значения $u(x,t)$ во всех точках (x,t) пр-ва E_{n+1}, которые обладают тем свойством, что $G\cap\{|y-x|^2=t^2\}\neq\varnothing$. Мн-во таких точек - область влияния

Мн-во $(x,t)\in E_{n+1}$, в которых $u(x,t)$ опр. по зад. $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на G наз. областью определения или распространения волны.

$n=3$ - сфера, $n=2$ - круг, $n=1$ - отрезок



Область определения:

1) $n=3$. сфера $|y-x|^2=t^2$, ли пересеч. хар-го конуса K: $|y-x|^2=(\tau-t)^2$ с гипер. $\tau=0$ принадлежит G

2) $n=2$, круг $|y-x|^2\leq t^2\in G$

3) $n=1$, т. $(x-t,0),(x+t,0)$ - пересеч прямых (вырожд. конусов) проходящих через точку (x,t) с прямой $\tau=0$,
$y-x=\tau-t$, $y-x=t-\tau$,
но и весь принадлежат отрезок пр. G.

8. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения

Докажем, что задача Коши не может иметь больше одного решения.
Для простоты ограничимся случаем одного пространственного измерения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 & (*) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0 & (**) \end{cases}$$

надо доказать, что задача имеет ед. решение (тривиальное) $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 0$ проинтегрируем

$$-2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = -2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

по треугольной области Δ с вершинами в точках $A(x-t,0)$, $B(x+t,0)$, $C(x,t)$ и используя формулу (GO) получаем

$$\iint_\Delta \left[-2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\right] d\xi\, d\tau =$$

$$= \int_{AB+BC+CA} -2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \tau}\, d\tau - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\right] d\xi = 0$$

вдоль AB в силу (**) $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial \tau} = 0$

Кроме того, т.к. ур-ния BC, CA имеют вид $\xi = -\tau + x + t$, $\xi = \tau + x - t$, то
вдоль этих отрезков имеем: $d\xi = -d\tau$, $d\xi = d\tau \Rightarrow$

$$\int_{BC}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau - \int_{CA}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau = 0 \text{ или } \int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau + \int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\tau = 0,$$

тогда $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ на BC и $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ на AC. $\Rightarrow$ в вершине
$C(x,t)$ Δ имеют место р-ва $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$, т.е $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$; $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Т.к. $C(x,t)$ выбрана пр-но, то р-ва $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ имеют место всюду на плоскости переменных (x,t) $\Rightarrow u(x,t) = \text{const}$. Но в силу (**) $u(x,0) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ всюду.

Если $u_1(x,t)$ – реш. неоднор. ур-ния, удовл. $u_1(x,0) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial}{\partial t}u_1(x,t)\Big|_{t=0} = \psi(x)$,
то $u_2(x,t)$ – реш. однор. ур-ния, удовл. неоднор. нач. усл. (по ф. Даламбера)
$u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ – решение неоднор. ур-ния. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g(x,t)$

9 Общая постановка задачи Коши для волнового уравнения. Бицадзе 1. стр 165.

12 Не ясно, в чем разница! Был только одномер. случай.

Носителем начальных данных $u_1(x,0)=\varphi(x)$ и $\frac{\partial}{\partial t}u_1(x,t)\Big|_{t=0}=\psi(x)$ в

З. Коши: $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 u}{\partial t} = -g(x,t)\equiv 0 \\ u(x,0)=\varphi(x), \ \frac{\partial}{\partial t}u_1(x,t)\Big|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$ является плоскость $t=0$ пространства E_{n+1} переменных $x_1,\dots x_n, t$.

Р-м $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ (*) и покажем на его примере, каким условиям должен удовлетворять носитель L начальных данных, отличный от $t=0$, и какой вид должны иметь сами начальные данные для того, чтоб задача была поставлена корректно.

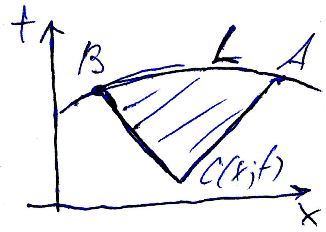
Обозначим через D область плоскости переменных x,t с кусочно-гладкой жордановой границей S. $\exists u(x,t)$ — регулярное в области D решение (*), имеющее непрерывные частные производные в $D\cup S$.

Интегрируя $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)=0$ по $D \Rightarrow \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)\right]dx_1dt_1 = \int_S \frac{\partial u}{\partial x_1}dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1}dx_1 = 0$ (1)

$\exists L$ — разомкнутая кривая Жордана с непр. кривизной:

а) каждая прямая из двух семейств $x+t=const$, $x-t=const$ хар-сек уравнения пересекается с кривой L не более, чем в одной её точке

б) направление касательной к кривой ни в одной точке не совпадает с характеристическим направлением, соответствующим (*)



Пр-м, что х-ки $x_1-x=t_1-t$, $x_1-x=t-t_1$, выходящие из $C(x,t)$ пересекаются с кривой L в точках A и B. Применяя

(1) в ///: $\int_{AB+BC+CA} \frac{\partial u}{\partial x_1}dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1}dx_1 = 0$ (2)

Т.к. вдоль CA и BC имеем $dx_1=dt_1$ и $dx_1=-dt_1$, то (2) $\Rightarrow \int_{AB}\frac{\partial u}{\partial x_1}dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1}dx_1 - 2u(C) + u(A)+u(B)=0$.

$$u(C)=\frac{1}{2}u(A)+\frac{1}{2}u(B)+\frac{1}{2}\int_{AB}\frac{\partial u}{\partial x_1}dt_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}dt_1 \quad (3)$$

Если решение $u(x,t)$ (*) удовл. условиям $\overbrace{u\big|_L=\varphi;\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_L=\psi}^{(4)}$, где φ и ψ — заданные действительные функции, где $\varphi\in C^2$, $\psi\in C^1$, а l-гладкий вектор нигде не совпадающий с касательной к кривой L, то:

что определяя $\frac{\partial u}{\partial x_1}$; $\frac{\partial u}{\partial t_1}$ из равенств $\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds}+\frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{dt_1}{ds}=\frac{d\phi}{ds}$

$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dl}+\frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{dt_1}{dl}=\psi$, где s - длина дуги L

и подставляя изв. значения u, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$; $\frac{\partial u}{\partial t_1}$ в правую часть (3), получим регулярное решение уравнения (*), отвечающего условиям (4)

$$\begin{cases}\frac{\partial u^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ u|_L=\phi;\ \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_L=\psi\end{cases}$$

Из приведенного рассуждения $\Rightarrow$ что в указанной постановке з. Коши имеет единственное решение.

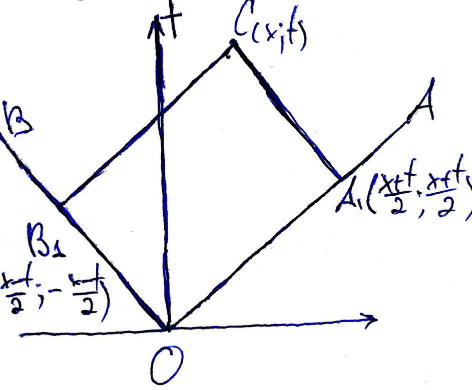
⑩ Задача с данными на характеристиках, задача Гурса

Бицадзе 1 стр 167

Р-м: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ (1); D — область плоскости переменных x, t; S — кусочно-гладкая Жордановая граница.

Интегрируем $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \dfrac{\partial}{\partial t_1}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t_1}\right) = 0$ по обл. $D + (GO) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)\right] dx_1 dt_1 = \int\limits_S \frac{\partial u}{\partial x_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1} dx_1 = 0 \quad (*)$$



$\exists L$ — совокупность отрезков OA и OB характеристик $x_1 - t_1 = 0$; $x_1 + t_1 = 0$ соответственно.

Хар-ки $x_1 - x = t - t_1$; $x_1 - x = t_1 - t$, выходящие из точки $C(x,t)$ пересекаются с OA и OB в точках $A_1\left(\frac{x+t}{2}; \frac{x+t}{2}\right)$ и $B_1\left(\frac{x-t}{2}; -\frac{x-t}{2}\right)$ соответственно. Применим (*) в случае хар-во $\square$ OA_1CB_1.

$$\int\limits_{OA_1 + A_1C + CB_1 + B_1O} \frac{\partial u}{\partial x_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} dx_1 = 0 \text{ или } \int\limits_{OA_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 - \int\limits_{A_1C} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \int\limits_{CB_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 - \int\limits_{B_1O} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 = 2u(A_1) - 2u(O) - 2u(C) + 2u(B_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(C) = u(A_1) + u(B_1) - u(O) \quad (**)$$

Если известно, что $\boxed{u\big|_{OA} = \varphi(x),\ u\big|_{OB} = \psi(x),\ \varphi(0) = \psi(0)}$ (2), то из (**) получаем

$$u(x,t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \varphi(0) \quad (!)$$

Из этой формулы следует, что значения u и $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ вдоль характеристик независимо друг от друга задавать нельзя.

Задача опр-ния регулярного реш. ур-ния (1) по условиям (2) называется задачей Гурса. $u(x,t)$ — ! решение устойчивое.

(11) Функция Римана. Бицадзе стр 169 §4

Линейное уравнение с частными пр-ными второго порядка гиперболического типа можно записать в виде: $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + A(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y} + C(x,y)u_1 = F_1(x,y)$

В хар-ых переменных $\xi = x+y$, $\eta = x-y$ $\Rightarrow$

(1) $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = F$, где $4a = A+B$; $4b = A-B$; $4c = C$; $4F = F_1$

$u(\xi,\eta) = u_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}; \frac{\xi-\eta}{2}\right)$. Хар-ки ур-ния прямые $\xi = const$, $\eta = const$

В предположении диф-ти коэффициентов a и b вводится понятие оператора $L^* v = \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv$, сопряженного с оператором L

$(Lx,y) = (x, L^*y)$

Опр: решение $v(\xi,\eta)$ сопр-ного ур-ния $\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv = 0$ (2) удовлетворяет на характерист. $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$ условиям $v(\xi_1,\eta) = \exp\int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,\eta_2)\,d\eta_2$;

$v(\xi,\eta_1) = \exp\int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)\,d\xi_2$, где (ξ_1,η_1) - произвольно фиксированная точка области D задания уравнения (1) называется функцией Римана

Теорема: При дополнительном требовании непрерывности $\frac{\partial a}{\partial\xi}$, $\frac{\partial b}{\partial\eta}$ и c функция Римана существует.

Д-во: проинтегрируем (2) $\left(\int_{\xi_1}^{\xi}\int_{\eta_1}^{\eta}\right)$: $v(\xi,\eta) - v(\xi,\eta_1) - v(\xi_1,\eta) - \int_{\xi_1}^{\xi} a(\xi_2,\eta)v(\xi_2,\eta)\,d\xi_2 - \int_{\eta_1}^{\eta} b(\xi,\eta_2)v(\xi,\eta_2)\,d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int_{\eta_1}^{\eta} c(\xi_2,\eta_2)v(\xi_2,\eta_2)\,d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)v(\xi_2,\eta_1)\,d\xi_2 + \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,\eta_2)\cdot v(\xi_1,\eta_2)\,d\eta_2 = 0$. (*) | стр 170-172 док-во.

Получаем: (*) $\rightarrow$ в виде линейного интегр. ур-ния Вольтерра 2-го рода, имеющего ед. решение $\Rightarrow \exists$ ф-ция Римана существует.

$v = R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) \Rightarrow$ ф-ция Римана явл. решением $LR(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0$

При непр. части $F(\xi,\eta)$ одним из его частных решений явл.

$u_0(\xi,\eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta}^{\eta_1} R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)F(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1$

(13) Ур-ние Лапласа. Св-ва гармонических функций. Бицадзе 1 стр 22, стр 41

Уравнение Лапласа: $\Delta u=0$, где $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Характеристическая форма, соответствующая уравнению: $Q=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$, положительно определена во всех точках пр-ва E_n => эллиптично всюду в E_n. Более того, оно, очевидно, равномерно эллиптично в E_n

если $\exists k_0,k_1>0:\ k_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\le Q(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\le k_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$ $\forall x\in D$.

Опр: ф-ция $u(x)$, обладающая непр. част. пр-ными 2-го порядка и удовл. ур-нию Лапласа (т.е. явл. решением этого ур-ния) называется гармонической.

$$E(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{n-2}|\xi-x|^{2-n}, & n>2 \quad (2)\\ -\log|\xi-x|, & n=2\end{cases}$$, где $|\xi-x|$ – расстояние между x и ξ, при $x\ne\xi$

является решением уравнения Лапласа как по x, так и по ξ.

[При $x\ne\xi$: $\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}=-|\xi-x|^{-n}+n|\xi-x|^{-n-2}(\xi_i-x_i)^2 \Rightarrow \Delta E=-n|\xi-x|^{-n}+n|\xi-x|^{-n-2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-x_i)^2=0$

Опр: по (2) $E(x,\xi)$ – наз. элементарным или фундаментальным решением ур-ния Лапласа

При $n=3$ – она представляет собой потенциал ед. заряда, помещенного в x (или ξ)

Свойства гармонических функций:

1) $u(x)$ – гармоническая в обл. D => $u(\lambda Cx+h)$, где $\lambda=const$, C – орт. действ. матр. ($C^T=C^{-1}$ => $C^TC=CC^T=I$)

h – пост. действ. вектор

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(\lambda Cx+h)=\lambda^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}u(y)$$, где $y=\lambda Cx+h$ – очевидно (по Бицадзе)

[$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=\lambda C_{ji}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_j}\lambda C_{ij}=\lambda\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_j}C_{ji}$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_j}C_{ji}\right)=\lambda\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_j}C_{ji}\right)\frac{\partial y_k}{\partial x_i}=\lambda^2\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k\partial y_j}\overbrace{C_{ji}C_k}^{\delta_{kj}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\lambda^2\sum_{i}\sum_{k}\sum_{j}\overbrace{C_{ji}C_{ki}}^{\delta_{jk}}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k\partial y_j}=\lambda^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}=0]$$ || "Очевидно" до невозможности, сука.

2) $\exists u_k(x)$, $k=\overline{1,m}$ – гармонич. Тогда $u=\sum_{k=1}^{m}c_k u_k(x)$ – тоже гармоническая, $c_k=const$

③ ∃ u(x) гармон. в области D, непрерывна в $D\cup S$ вместе со своими пр-ными первого порядка и равна нулю на границе S области D, то $u(x)=0$ для всех $x\in D\cup S$ (св-во ед-ти гармон. ф-ций)

D - область пр-ва E^n с дост. гладкой S, а $u(x)$, $v(x)$ - гармон функции, непр вместе со своими пр-ными первого порядка в $D\cup S$

Интегрируя по области D тожд-ва $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}$,

$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)=0$ и пользуясь ГО $\Rightarrow \int_S v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}dS_y=\sum_{i=1}^{n}\int_D\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}d\tau_x$ (1)

1ая Грина

2ая Грина $\Rightarrow \int_S\left[v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}-u(y)\frac{\partial v(y)}{\partial \nu_y}\right]dS_y=0$ (2)

ν - внеш нормаль к S.

После этого уже опр св-ва!!!

③ $u(y)=0$ при $y\in S$ имеем $\{u(x)=v(x)\}$: $\sum_{i=1}^{n}\int_D\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2d\tau_x=\int_S u(y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}dS_y$,

$\sum_{i=1}^{n}\int_D\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2d\tau_x=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x_i}=0,\ i=1\dots n\Rightarrow u(x)=const\Rightarrow u(y)=0,\ y\in S\Rightarrow u(x)=0\ x\in D\cup S.$

④ Если ~~[illegible]~~ $\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}$, $u(x)$ - гармон в области D, непр-ноб вместе со своими пр-ными первого порядка в $D\cup S$: $\left.\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}\right|_{\partial S}=0$, то $u(x)=const$.

граница

Аналогично ③, если учесть.

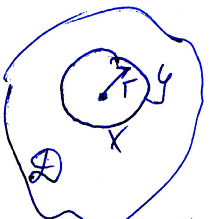
⑤ Интеграл, взятый по границе S от нормальной $\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}$ $u(x)$ - гар в D, непр -//- ... $=0$.

В (1): положим $v(x)=1$, $x\in D\Rightarrow\int_S\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}dS_y=0$. (3)

Параграф уже не со свойствами, стр 44:

⑥ Для $u(x)$ - гармон в D -//- : $u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_S E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}dS_y-\frac{1}{\omega_n}\int_S u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}dS_y$, (4)

где $E(x,y)$ - элем. решение ур-ния Лапласа, $\omega_n=\frac{1}{\Gamma(n/2)}2\pi^{n/2}$ - площадь ед. сферы в E_n

⑦ 

Если шар $|y-x|\le R$ лежит целиком в области D, где $u(x)$ - гармонична, то знач. этой функции в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на шаре.

$E(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{(n-2)R^{n-2}}, & n>2\\ -\log R, & n=2\end{cases}$; в силу (3) из (4) получаем $u(x)=\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{|y-x|=R}u(y)dS_y$ ... по сфере

сред гармон

$u(x)=\frac{n}{\omega_n R^n}\int_{|y-x|\le R}u(y)d\tau_y$ по шару.

(14) Самосопряженные и несамосопряженные эллиптические операторы. Формула Грина. Бицадзе 1 с.74

Заданному в области D пр-ва E_n лин. диф. оператору 2-го порядка

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(x)u,$$

при наличии частных производных первого порядка у коэф A_{ij} можно придать вид:

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}e_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu,\quad e_i(x)=B_i-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j},\ i=1,\dots n\ (*)$$

Когда ф-ии $e_i(x)$ имеют част. пр-ные 1-го порядка, вводится понятие сопряженного оператора

$$L^*v=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i v)+Cv\quad (**)$$

Опр: оператор L называется самосопряженным, если $Lu=L^*u$

L будет самосопряженным $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}=B_i(x),\ i=\overline{1..n}$

В силу $(*)$ и $(**)$ всюду в области D.

При требовании равном. эллиптичности диф-ого оператора L и достаточной гладкости границы S области D и ф-ций $u(x)$ и $v(x)$ в р-ве инт-ния:

$$vLu-uL^*v=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}v-\frac{\partial v}{\partial x_i}u\right)\right]+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i u v)$$

по области D

В силу формулы (ГО) получаем формулу Грина:

$$\int_D (vLu-uL^*v)\,d\tau_x=\int_S\left(av\frac{du}{dN}-uG_\xi v\right)dS_\xi$$

где $G_\xi v=a\frac{dv}{dN}-bv$, N − ед. вектор - конормаль

в точке $\xi\in S$, с напр. косинусами $\cos\widehat{N\xi_i}=\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\cos\widehat{\nu\xi_j}\quad i=1..n$,

ν − внеш. нормаль к S в т. ξ, а

$$a^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\cos\widehat{\xi\nu_j}\right)^2,\quad b=\sum_{i=1}^{n}e_i\cos\widehat{\nu\xi_i}$$

В силу равномерной эллиптичности оператора L конормаль N ни в одной точке ξ пов-ти S не выходит в кас. плоскости $a\neq0$.

$\exists\ \nu=(\nu_1\dots\nu_n)$ - внешняя нормаль в x_k гладкой пов-ти S в E^n.

g^{ij} - контрвар. тензор, обычно представл. коэф. эл-ого диф. оп-ра 2-го пор.

$D=g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, тогда конормаль вектор $\nu^i=g^{ik}\nu_k$ [Бицадзе/Миранда]

(15) Параметрикс (функция Леви) Бицадзе с. 95, 90

Параметрикс – один из методов изучения краевых задач для диф. уравнений с переменными коэффициентами с помощью интегральных уравнений – имеет

$\exists$ в какой-то области G задан эллиптичный диф-ный оператор:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) + C(x)u = f(x) \quad A_{ij} = A_{ji}$$

[оператор L эллиптичен, т.е. соотв ему хар-кая квадр. форма $Q(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j$ полож. опред]

Обозначим через $a_{ij}(x)$ отн. алгебр. дополнения эл. матр A_{ij} к $|A_{ij}|$ и введем $\sigma(x,y) \in G$ {т.е. $a_{ij} = \frac{\text{алгебр. доп к эл-ту } A_{ij}}{\det |A_{ij}|}$}

(*) $\sigma(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j)$

! (*) потребуем $A_{ij} \in C^{3,0}(D \cup S)$
$B_i, C, f \in C^{4,0}(D \cup S)$

И рассмотрим $\varphi(x,y) = \begin{cases} \sigma_0(y)\,\sigma^{\frac{2-n}{2}}, & n>2 \\ -\frac{1}{4\pi\sqrt{A(y)}}\ln\sigma, & n=2. \end{cases}$ – параметрикс или функция Леви

$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ – площадь ед. сферы в E^n ($\omega_2 = 2\pi$; $\omega_3 = 4\pi$) $\left[\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-t} dx\right]$

$\sigma_0 = \left[\omega_n (n-2)\sqrt{A(y)}\right]^{-1}$, $A(y)$ – опред. матрицы A_{ij}

для эллипт ур-ния $\exists$ канон базис: $\Rightarrow$ потому что

При $n=2$ можно считать, что $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $a_{ii} = 1$, $i = 1, 2$, т.е. $A(y) = 1$

В случае $n>2$ в силу равномерной эллиптичности L $A(y)$ в $D \cup S$ полож.

$\exists k_0, k_1$: $k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \le k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$

Когда $A_{ij} = 0$, $i \neq j$, $A_{ii} = 1$, $i = 1 \ldots n$ опр по (*) $\sigma(x,y) = |x-y|^2$, $A(y) = 1$,

$\sigma_0 = \frac{1}{\omega_n(n-2)} \Rightarrow \omega_n \varphi(x,y)$ – элементарное решение ур. Лапласа в E^n

$$\omega_n \varphi(x,y) = E(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}|x-y|^{2-n}, & n>2 \\ -\ln|x-y|, & n=2 \end{cases}$$

(**) $u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_D E(x,y)\mu(y)\,d\tau_y$ – в случае сходимости ньютонов потенциал объемных масс с плотностью μ.

Через ф-цию Леви можем дать решение эллиптич. уравнения 2-го порядка и не в канонической форме
В случае канонич. формы фунд. реш. Лапласа — частный случай ф. Леви

(16) Фундаментальное решение для ур-ния эллиптического вида

$u(x)$ имеет непр. произ-ные 1-го порядка всюду в E_n, и 2-го в $\mathcal{D}(G)$:

1) $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x_i} E(x,y)\,\mu(y)\,d\tau_y$, $i=1\dots n$ — ф-ция вне замкнутой $\mathcal{D}\cup S$ — гармонична, причем когда $|x|\to\infty$ она исчезает при $n>2$; при $n=2$ ведет себя как $-\log|x|\int\limits_{\mathcal{D}}\mu(y)\,d\tau_y$

2) $\frac{\partial E(x,y)}{\partial x_i} = -\frac{\partial E(x,y)}{\partial y_i}$, $i=1\dots n \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\mathcal{D}}\mu(y)\frac{\partial}{\partial y_i}E(x,y)\,d\tau_y$ или после интегрирования по частям: $\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S E(x,y)\,\mu(y)\cos(\nu_y, y_i)\,dS_y + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\mathcal{D}}\frac{\partial \mu}{\partial y_i}E(x,y)\,d\tau_y$,

Отсюда $\Rightarrow \exists$ 2-го порядка в каждой $x\in\mathcal{D}$, причем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial x_j}\mu(y)\cos(\nu_y, y_i)\,dS_y + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\mathcal{D}}\frac{\partial \mu}{\partial y_i}\frac{\partial E(x,y)}{\partial x_j}\,d\tau_y = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial y_j}\mu(y)\cos \nu_y y_i\,dS_y$$

$$-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\mathcal{D}}\frac{\partial \mu}{\partial y_j}\,d\tau_y \Rightarrow \Delta u = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\mu(y)\,dS_y - \frac{1}{\omega_n}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon}\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial y_i}\frac{\partial E(x,y)}{\partial y_i}\,d\tau_y,$$

где $\mathcal{D}_\varepsilon$ — часть области $\mathcal{D}$ вне замкнутого $|y-x|\le\varepsilon$ лежащего в $\mathcal{D}$

Т.к. при $x\neq y$ $\sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial^2 E(x,y)}{\partial y_i^2} = 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial y_i}\frac{\partial E}{\partial y_i} = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\mu\frac{\partial E}{\partial y_i}\right) + \underbrace{\sum\limits_{i=1}^n \mu\frac{\partial^2 E}{\partial y_i^2}}_{=0}$

(E-фунд. реш.)

В рез-тате инт-ния по частям и (GO): $\int\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon}\sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial y_i}\frac{\partial E(x,y)}{\partial y_i}\,d\tau_y = \int\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon}\sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\mu\frac{\partial E(x,y)}{\partial y_i}\right)d\tau_y =$

$$=\int\limits_S \mu(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\,dS_y - \int\limits_{|y-x|=\varepsilon}\mu(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\,dS_y \Rightarrow \Delta u = \frac{1}{\omega_n}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|y-x|=\varepsilon}\mu(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\,dS_y = \{\text{Бицадзе 2 [illegible]}\} =$$

$= -\mu(x)$ (*) Означает, что ньютонов потенциал (**) — регулярное решение ур-ния Пуассона $\Delta u = -\mu(x)$!!! [$\Delta\varphi = f$ - Пуассон, $\Delta\varphi = 0$ - Лаплас.]

17 Принцип максимума для эллиптических уравнений Бицадзе 1 79

Если в области D всюду $C(x)<0$, то регулярное в этой области решение $u(x)$ однородного ур-ния $Lu=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(x)u=0$ ни в одной точке не может достигать ни отрицательного относительного минимума, ни положительного относительного максимума.

Д-во:

$\exists$ $u(x)$ в $x\in D$ достигает отриц. относ. минимума, мы можем написать $\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$, $i=1,\dots n$; $\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\lambda_i\lambda_j\geq 0$, где λ_i,λ_j - произв. параметры

Оператор L эллипт. $\Rightarrow$ $\forall$ полож. форму $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j$ в т. $x\in D$ всегда можно представить в виде $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} g_{kl}\lambda_l\right)^2 \Rightarrow A_{ij}=\sum_{s=1}^{n} g_{si}g_{sj}$ $i,j=1,\dots n$

На основании этого имеем: $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=\sum_{i,j,s=1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}g_{si}g_{sj}\geq 0$. Учитывая, что $u(x)<0$ в силу $\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$ и $C(x)u<0$ имеем, что $Lu>0$, что противоречит р-ву $Lu=0$. $\Rightarrow$ допущение неверно.

Аналогично для максимума.

Следствие: задача Дирихле $Lu=f(x)$, где $\underbrace{u(x)=g(x)}_{\text{краевое условие}}$, $g(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ при $C(x)<0$ не может иметь больше одного решения.

(18) Вариационные методы. Принцип Дирихле. Бицадзе стр 287

Ур-ия представляют собой ур-ие Эйлера для вариационных задач

($J=\int_a^b F(x,f(x),f'(x))dx$ - функционал, F - лагранжиан,

если J достигает экстремума на f, то: $\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}=0$ - ур-ие Эйлера)

Так, например, ур-ие Лапласа $\Delta u(x,y)=0$ может служить ур-ием Эйлера задачи $\min D(u)=\int_D (u_x^2+u_y^2)dxdy$ - интеграл Дирихле по области D с границей S.

(выражает потенц. энергию мембраны в положении изгиба).

Опр: непр-ные в $D\cup S$ ф-ции с кусочно-непрерывными в D первыми производными и конечным интегралом Дирихле, принимающие на S наперед заданные значения $\varphi(x,y)$ будем называть допустимыми функциями

Опр: Первая вариационная задача - задача отыскания среди допустимых ф-ций той ф-ии, которая минимизирует интеграл Дирихле. $D(u)$.

[В моем понимании: среди допустимых - внутри какого-то мн-ва => и задача Дирихле первая]

__Принцип Дирихле:__ если заданная на S функция $\varphi(x,y)$ такова, что класс допустимых функций не является пустым, то задача Дирихле и первая вариационная задача эквивалентна.

Д-во. $\exists$ ($\Rightarrow$) $u(x,y)$ - решение первой вар. задачи. Класс допустимых ф-ий представим в виде $u(x,y)+\varepsilon h(x,y)$, где ε - произв. постоянная, а $h(x,y)$ - произв ф-ция из класса допустимых ф-ций: $h(x,y)=0$, $(x,y)\in S$

$D(u+\varepsilon h)=D(u)+2\varepsilon D(u,h)+\varepsilon^2 D(h)\geq 0$, где $D(u,h)=\int_D (u_x h_x+u_y h_y)dxdy$

Так как $u(x,y)$ - минимиз. ф-ция и ε произв. const, то $\Rightarrow D(u,h)=0$.

Ф-ции $u(x,y)$, $h(x,y)$ и контур S будем считать настолько гладкими, что для них справедливы тождества $u_xh_x+u_yh_y=$ ~~...~~ $(u_xh)_x+(u_yh)_y-h\Delta u$.

$\int_D (u_xh)_x+(u_yh)_y dxdy=\int_D \Delta u h dxdy+\int_D \underbrace{u_xh_x+u_yh_y}_{=0} \Rightarrow \int_D h\Delta u dxdy=0$, откуда при предположении,

$\int_S h\frac{\partial u}{\partial \nu}ds$, ν - внеш. нормаль к S $\to 0$ т.к. $h|_S=0$.

Было в Бицадзе!!!

что Δu - непр в D в силу произв-ти $h(x,y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta u(x,y)=0 \Rightarrow$ при принятых допущениях решение первой вар. задачи явл. решением задачи Дирихле.

($\Leftarrow$) $\exists\, u(x,y)$ — реш. зад. Дирихле с усл. $u(x,y) = f(x,y)$ для ур. Лапласа

Д-м: $u(x,y) + \varepsilon h(x,y)$ — аналогично, причем для $u(x,y)$ и $h(x,y)$ имеет место

формула $u_x h_x + u_y h_y = (u_x h)_x + (u_y h)_y - h\Delta u$. Из этой формулы в

силу $h(x,y) = 0$, $(x,y) \in S$ и гармоничности $u(x,y) \Rightarrow D(u,h) = 0$

$\Rightarrow D(u+\varepsilon h) = D(u) + \varepsilon^2 D(h) \geq 0 \Rightarrow D(u) \leq D(u+\varepsilon h) = D(u) + D(\varepsilon h)$,

а это означает, что $u(x,y)$ минимизирует интеграл Дирихле, а следовательно является решением первой вариационной задачи.

Идея сведения краевых задач для уравнения Лапласа к экв. вар. задачам для $D(u)$

и есть принцип Дирихле.

(19) Вторая вариационная задача Бицадзе с. 263

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & (x,y) \in D, \ \lambda = \text{const} \ (1) \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in S \ (2) \end{cases}$$ – задача на с/з: в огр. области D с кусочно-гладкой границей S требуется опр-ть собственные знач. и с/ф.

Наименьшее собственное значение задачи (1)×(2) получается решением второй вариационной задачи: среди допустимых ф-ий (см. билет 18), удовлетворяющих условию (2) найти ту, для которой функционал $J(u) = \frac{D(u)}{H(u)}$ принимает наим. значен.

$H(u) = \int u^2 dxdy.$

D Покажем это:

$\exists\, u(x,y)$ – реш 2-ой вар задачи, причем $J(u) = \frac{D(u)}{H(u)} = \lambda > 0$ (3)

Для класса допустимых ф-ий: $u(x,y) + \varepsilon h(x,y)$, где $\varepsilon = \text{const}$, $h(x,y)$ – допустимая ф-ия: $h(x,y) = 0$ на S имеем: $F(\varepsilon) = \frac{D(u+\varepsilon h)}{H(u+\varepsilon h)} = \frac{D(u) + 2\varepsilon D(u,h) + \varepsilon^2 D(h)}{H(u) + 2\varepsilon H(u,h) + \varepsilon^2 H(h)} \geq \lambda$, где

$H(u,h) = \int\limits_D uh\,dxdy$, $D(u,h) = \int\limits_D (u_x h_x + u_y h_y)dxdy.$

Так, как $F(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ имеет минимум, то $F'(0) = 2\frac{H(u)D(u,h) - D(u)H(u,h)}{H^2(u)} = 0$,

откуда в силу (3) имеем $H(u)[D(u,h) - \lambda H(u,h)] = 0$, ввиду того, что $H(u) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D(u,h) - \lambda H(u,h) = 0.$ (4)

Допуская, что условия гладкости функций $u(x,y)$, $h(x,y)$ и S позволяют считать верным: $\underline{u_x h_x + u_y h_y} = (u_x h)_x + (u_y h)_y - h\Delta u$ и $D(u,h) = \int\limits_S h\frac{\partial u}{\partial \nu}ds - \int\limits_D h\Delta u\,dxdy$, перепишем (4) в виде: $\boxed{H(\Delta u + \lambda u, h)} = 0$, откуда в силу произвольности h (5)

$\boxed{\text{считаем, что } u(x,y) \text{ удовл } (1)}$ $\qquad \Leftrightarrow \int\limits_D h(\lambda u + \Delta u)dxdy = 0$

Если λ^* – отличное от λ с/зн, а $u^*(x,y)$ – соотв ему с/ф (1), (2) в силу (5) имеем: $H(\Delta u^* + \lambda^* u^*, u^*) = -D(u^*) + \lambda^* H(u^*) = 0.$

(2) Из этого р-ва следует, что $\left\{\lambda^* = \frac{D(u^*)}{H(u^*)} \geq \frac{D(u)}{H(u)} = \lambda\right\}$ λ - минимальное

(20) Прямые вариационные методы Бицадзе 1 стр 271

В вариационном исчислении имеются разные методы построения минимизирующих последовательностей [класс допустимых ф-ций $\{u\}$ не явл. пустым $\Rightarrow D(u)$ имеет нижнюю грань d, но мы не знаем является ли она допустимой но $\exists\ \{u_n\}$, $n=1,2\dots$ доп. ф-ций такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} D(u_n)=d$. $\{u_n\}$ – минимиз. пос-ть]. Эти методы применительно к задачам для урчп принято называть прямыми методами.

(1) Метод Ритца:

] р-м вопрос о минимизации $\Phi(u)$. Обозначим через v_n, $n=1,2\dots$ полную систему допустимых функций для $\Phi(u)$ и составим пос-ть $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k$, $n=1,2\dots$, где c_k – произвольные const. Опр-м коэф. c_k, $k=\overline{1..n}$ так, чтобы выражение $\varphi_n=\Phi(u_n)$, как функция $c_1\dots c_n$ было минимальным.

Пример: р-м вторую вар. задачу $\min J(u)$, когда область D – квадрат $(0,\pi)\times(0,\pi)$, причем будем считать, что $H(u)=1$. В качестве полной системы можем брать систему ф-ций: $\sin kx \sin ly$, $k,l=1,2\dots$

] $u_{mn}=\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} c_{kl}\sin kx\sin ly$, $m,n=1,2\dots$ (на границе $D=0$)

Кроме того, $d_{mn}=D(u_{mn})=\frac{\pi^2}{4}\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} c_{kl}^2(k^2+l^2)$; $H(u_{mn})=\frac{\pi^2}{4}\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} c_{kl}^2$. По схеме Ритца нам следует найти $\min d_{mn}$ при условии, что $\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} c_{kl}^2=\frac{4}{\pi^2}$. Решая задачу на усл. экстремум получим, что $\forall m,n\ c_{mn}=0$, кроме $c_{11}=\frac{2}{\pi}$, $d_{mn}=2$. т.е.

$\lim\limits_{m\to\infty, n\to\infty} u_{mn}=u(x,y)=\frac{2}{\pi}\sin x\sin y$; $\lim\limits_{m\to\infty, n\to\infty} d_{mn}=D(u)=\lambda=2$ } Метод Ритца позволяет строить прибл. реш. задачи о с/зн.

(2) Метод Бубнова-Галёркина

Задача на с/зн: $\begin{cases}\Delta u+\lambda u=0 & \text{в } D \ (*)\\ u(x,y)=0 & \text{в } S=\partial D\end{cases}$. За приближ. реш. задачи можно принять $\boxed{u_n(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k(x,y)}$, где коэф c_k опр из равенств: $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n} H(\Delta v_k+\lambda v_k, v_m)c_k=0,\ m=\overline{1..n}}$ (**) – однород. слау. имеет нетривиальные решения, если det=0: $\det\begin{Vmatrix} H(\Delta v_1+\lambda v_1, v_1) & \dots & H(\Delta v_n+\lambda v_n, v_1)\\ \dots & \dots & \dots\\ H(\Delta v_1+\lambda v_1, v_n) & \dots & H(\Delta v_n+\lambda v_n, v_n)\end{Vmatrix}=0$. Определенные λ λ удовлетворяет называются за приближ. выражение с/з. задачи (*), а выражение для с/ф: $u_n(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k(x,y)$, в которой c_k – решения системы (**)

(21) Обобщенные решения классических краевых задач. Бицадзе 2≈174

(1) Эллиптический тип

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu(x)=f(x),\quad x\in G,\qquad e_i(x)=B_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j},\ i=1..n$$

$G\subset E_n$ и $S=\partial G$ $(n-1)$мерная поверхность.

В классической постановке задачи Дирихле требуется найти регулярное в области G решение $u(x)$ с краевым условием $u(x)=g(x)$, $x\in S$.

Обобщим задачу Дирихле в том случае, когда краевое условие однородно, $u(x)=0$, $x\in S$.

Опр: Пусть A_{ij}, e_i, C - огр. измерим. функции и $f\in L_2(G)$. Тогда под обобщенным реш. в пр-ве W_2^1 задачи $Lu=f$, $x\in G$, $u(x)=0$, $x\in S$ понимается функция $u(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1$, для которой имеет место тождество:

$$\int_G\left(-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}e_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v+cuv-fv\right)dx=0 \quad (*)$$

$\forall v\in \overset{0}{W}{}_2^1$, причем под $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ понимаются обобщенные пр-ные функции $u(x)$ первого порядка.

(1) Говорят, что $v(x)$ явл. обобщ. пр-ной порядка m функции $u(x)$, если имеет место тождество $\int_G uD^m\varphi\,dx=(-1)^m\int_G v\varphi\,dx$, $\forall$ финитной $\varphi(x)$ с компакт. носителем в G.

(2) Заданная в G $\varphi(x)$, $x=(x_1\ldots x_n)$ — финитна, если она бесконечно много раз дифф-ма и тожд. равна нулю вне компакта $K\subset G$. Компакт K - носитель $\varphi(x)$

(3) Пр-во Соболева — функц. пр-во, состоящее из ф-ий пр-ва Лебега L^p, имеющих обобщенные пр-ные заданного порядка $K\Rightarrow W_p^K$

$L_2(G)$, имеют обоб пр-ные 1го порядка $\Rightarrow W_2^1$

(4) Для пар $(u,v)\in W_2^1$ определим: $\int_G(\nabla u\cdot\nabla v+uv)dx$,

норма $\|u\|_{W_2^1}=\left(\int(\nabla u\nabla u+u^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}$, то W_2^1 - станет сепарабельным банаховым пр-вом

! — о сверху D для эллипт. („0" - это важно)

(5) $\overset{0}{W}{}_2^1$ — замыкание мн-ва всех финитных ф-ий с компактным носителем в G: $(u,v)=\int_G\nabla u\cdot\nabla v\,dx$

Это все в Бицадзе до обобщенных решений, вероятно лучше написать.

Когда обобщенное решение $u(x)$ и функции A_{ij} достаточно гладки, в после интегрирования по частям тождество (*) можно переписать в виде: $\int_G(Lu-f)v\,dx=0$, откуда, требуя непр. Lu и f приходим к заключению, что $u(x)$ - классическое решение задачи

② Р-ие уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu = f(x,t), \text{ где } Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u,$$

является равномерно эллиптическим в $\Omega \subset E^{n+1}$. $S: \{\partial G \times (0 \le t \le T\}$

$\exists\, G$ - огранич. область $G \subset E^n$, а $Q = \{ G \times | 0 < t < T\} \subset \Omega$, $T = const > 0$

Опр: основная смешанная задача для ур-ния (**): определение регуляр-ного в Q реш. $u(x,t)$, непр. в Q и ∂Q и удовлетвор. условиям $u(x,0) = \tau(x)$,

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \nu(x), \quad u|_S = 0.$$

Опр: замыканием по норме $W_2^1(Q)$ гладких в Q ф-ий, обращающихся в нуль вблизи S, обозначим через $W_{20}^1(Q)$! - другое замыкание

Опер L для ур-ния 2-го порядка обладает св-вом равномерной эллиптичности, если для соотв ему $G(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$ $\exists K_0, K_1 > 0$: $K_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \le G \le K_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$

Опр: Обобщенным решением данной задачи в пр-ве $W_2^1(Q)$ назыв $u(x,t) \in W_{20}^1$, обращающаяся при $t=0$ в $\tau(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(G)$ и удовл. тождеству:

$$(**) \quad \int_Q \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\mathcal{V} - cu\mathcal{V}\right)dx\,dt = \int_G \nu(x)\mathcal{V}(x,0)\,dx + \int_Q f\mathcal{V}\,dx\,dt$$

$\forall\, \mathcal{V}(x,t) \in W_{20}^1(Q)$: $\mathcal{V}(x,T) = 0$.

Для того чтобы (**) имело смысл нужно потребовать A_{ij}, a_i, c были ограничены и измеримы, а $f \in L_2(Q)$, $\nu \in L_2(Q)$.

③ Параболический тип

(1) $\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = f(x,t)$; Lu и f удовлетворяют тем же условиям. $T = const > 0$.

G - огр. область $\subset E^n$; $Q = \{G \times (0 < t < T)\}$, $S = \{\partial G : (0 \le t \le T\}$

$u(x,0) = \varphi(x) \in G$; $u(x_0,t) = \psi(t)$, $(x_0,t) \in S$. (2), (3)

$$\left[\begin{aligned} &(u,v) = \int_Q \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + uv\Big)dx\,dt \\ &\|u\| = (u,u)^{1/2} \Rightarrow W_2^{1\,0} \end{aligned}\right.$$

при $\psi/t = 0$ в пр-ве $W_2^{1\,0}$ - замыкание нового пр-ва.

Опр: под обобщенным решением задачи (1), (2), (3) при $\psi/t=0$ в пр-ве $\overset{0}{W}{}_2^{1\,0}$ понимается $u(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1\,0}$ в предположении, что $\varphi \in L_2(Q)$,

$$\int_Q \left(-u\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\mathcal{V} - cu\mathcal{V}\right)dx\,dt = \int_G \varphi\mathcal{V}(x,0)\,dx + \int_Q f\mathcal{V}\,dx\,dt$$

$\forall\, \mathcal{V}(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1\,0}$ при $t=T$.

22) Методы разделения переменных, круговая мембрана, ф-ция Бесселя. (Бицадзе 1, 217)

В теории колебания струны важную роль играют решения уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, представимые в виде $u(x,t) = v(x)w(t)$ - называемые стоячими волнами. $\Rightarrow v''(x)w(t) - v(x)w''(t) = 0$ или $\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{w(t)} = const$

$\Rightarrow$ получим $v''(x) + \lambda v(x) = 0$ и $w''(t) + \lambda w(t) = 0$. - оду 2^го^ порядка.

$\lambda = 0$: $v = c_1 x + c_2$; $\lambda > 0$: $v = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$; $\lambda < 0$: $v = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

~~Ана~~ Аналогично записываются решения и для функции w.

Круговая мембрана - закрепленные края вдоль кривой C и ограничивающ. G.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y) \\ \left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y);\ (x,y) \in G \\ u(x,y,t) = 0,\ t > 0\ (x,y) \in C, \end{cases}$$

$\rightarrow$ ~~Чтобы рассмотренные стоячие волны в предыдущем~~ ~~[illegible]~~ $u(x,y,t) = v(x,y)w(t)$ - было решением, нужно, чтоб $\Delta v(x,y) + \lambda v(x,y) = 0$ и $w''(t) + \lambda w(t) = 0$, где $\lambda = -\frac{\Delta v(x,y)}{v(x,y)} = -\frac{w''(t)}{w(t)} = const.$

Краевое условие $v(x,y) = 0\ (x,y) \in C \Rightarrow$

~~[illegible]~~

$\Rightarrow$ получим уравнение Гельмгольца $\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0 \\ v|_C = 0 \end{cases}$, $\lambda \neq 0$ для которого задача имеет нетривиальное решение - собственное значение, а $v(x,y)$ соотв λ - с/ф.

Предполагаем, что C - кус.-гладкая кривая Жордана:

$v_x^2 + v_y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(v v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(v v_y) - v \cdot \Delta v \Big| \int_G \Rightarrow \int_G (v_x^2 + v_y^2)\,dx\,dy = \int_C \overset{0}{v} \frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS - \int_G v \underline{\Delta v}\,dx\,dy =$ ($\Delta v = -\lambda v$)

$= \lambda \int_G v^2\,dx\,dy \Rightarrow \lambda > 0$. Тогда мы можем принять обозначение $\lambda = \mu^2$, где μ - действительное число. [если λ - с/з $\Rightarrow \lambda = \frac{\int_G (v_x^2 + v_y^2)\,dx\,dy}{\int_G v^2\,dx\,dy}$]

Пусть $\lambda = \mu^2$, тогда $\Rightarrow w'' + \mu^2 w = 0$ - можно решить $[w(t) = c_1 \cos\mu t + c_2 \sin\mu t]$

$G_r: x^2 + y^2 < 1$ - мембрана в положении покоя занимает круг.

Пусть $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta \Rightarrow \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$

Запишем уравнение Гельмгольца в виде: $\boxed{v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + \mu^2 v = 0}$

$\exists\, u(r,\theta) = R(r)\cdot\Phi(\theta) \Rightarrow R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' + \mu^2 R\Phi = 0 \;/ : R\Phi$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \mu^2 r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \omega^2$$

$$r^2R'' + rR' + (\mu^2r^2 - \omega^2)R = 0 \text{ и } \Phi'' + \omega^2\Phi = 0$$

$\omega \overset{!!}{=} n$ из период $\Phi(\theta)$.

Сделаем замену $\mu r = \rho$, $R(\frac{\rho}{\mu}) = J(\rho)$ $[\mu r = x,\ R(\frac{x}{\mu}) = J(x)]$

$J''(\rho) + \frac{1}{\rho}J'(\rho) + (1 - \frac{n^2}{\rho^2})J = 0$ – ур-ние Бесселя

или $\boxed{x^2J''(x) + xJ'(x) + (x^2 - n^2)J(x) = 0}$

реш. ур-ния (ф-ия Бесселя) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = J_n(x),\ n = 0, 1, 2\dots$

Второе решение имеет особенности в нуле $\Rightarrow$ оно нам не подходит

Каждая функция Бесселя имеет счетный набор корней на положительной полуоси.

Введем мн-во нулей $M_n = \{\gamma > 0 : J_n(\gamma) = 0\} = \{\gamma_1^{(n)} < \gamma_2^{(n)} < \dots \gamma_k^{(n)} < \dots\}$

$\gamma_1^n > 0$, $\gamma_k^{(n)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$. При фикс $n \in \mathbb{N}$ $\gamma_k^{(n)} = \gamma_k$, тогда

спектр $\lambda_k = \mu_k^2 = \left(\frac{\gamma_k}{R}\right)^2$, $R_k(r) = J_n\left(\frac{\gamma_k}{R}r\right), k = 1, 2\dots$] аналогично γ_m^n

У нас есть условие $R(1) = 0$: $R(\frac{\rho}{\mu}) = J(\rho) \Rightarrow J_n(\rho_{n,m}r)$ – собств ф-ии.

23 Свойства с.ф. и с.зн.

Задача на собственные значения: $\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$ (*)

Найти такие λ, при которых задача (*) имеет нетривиальные решения и λ – с/зн. задачи (*), а соотв им решения – с/ф.

1) $\exists$ бесконечное счетное мн-во с/зн.

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_k \le \ldots \quad \lambda_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

2) Все с/зн (*) положительны.

Д-во: $(*) \cdot u \to \int\limits_\Omega u \Delta u \,dx\,dy = -\lambda \int\limits_\Omega u^2 dx\,dy \Rightarrow \{\text{т. ГО}\} \Rightarrow \{\operatorname{div}(v \nabla u) = v\Delta u + (\nabla u, \nabla v)\}$

$\Rightarrow \int\limits_\Omega u \Delta u \,dx\,dy = \int\limits_\Omega u \operatorname{div}(\nabla u)\,dx\,dy - \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS - \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla u)\,dx\,dy = -\int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla u)\,dx\,dy \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla)\,dx\,dy}{\int\limits_\Omega u^2 dx\,dy} \ge 0 \quad (= 0 \Leftrightarrow \nabla u = 0 \text{ во всей } \Omega)$$

3) Двум различным с/зн λ и μ отвечают с/ф u и v, которые ортогональны:

$$\int\limits_\Omega u \cdot v \,dx\,dy = 0$$

Д-во: $(*) \cdot v \to \int\limits_\Omega \Rightarrow \int\limits_\Omega v \Delta u \,dx\,dy = -\lambda \int\limits_\Omega u v \,dx\,dy \Rightarrow \{ГО\} \Rightarrow \int\limits_\Omega v \Delta u \,dx\,dy = \int\limits_\Omega v \operatorname{div}(\nabla u)\,dx\,dy =$

$= \int\limits_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS - \int\limits_\Omega (\nabla v, \nabla u)\,dx\,dy = \int\limits_\Omega u \Delta v \,dx\,dy$

$$\int\limits_\Omega u \Delta v \,dx\,dy = -\mu \int\limits_\Omega u v \,dx\,dy \Rightarrow (\lambda - \mu) \int\limits_\Omega u v \,dx\,dy = 0 \Rightarrow \int\limits_\Omega u v \,dx\,dy = 0$$

~~[illegible]~~:

(24) Разрывные решения ур. аэродинамики, ЗС, УВ

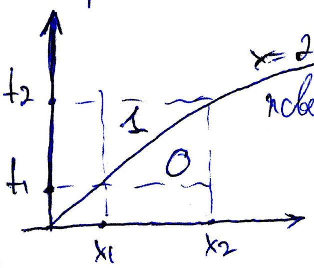
Фактически, соотнош. Гюгонио связывают величины до ударной волны и после, вне зависимости от агрегатного состояния

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 & \text{— ур-ние нер-ти (1)} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 & \text{— ур. движения (2)} \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + v\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(pv) = 0 & \text{— энергии (3)} \end{cases}$$

а) $(1)\cdot v + (2)\rho:\ \left(v\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial v}{\partial t} + \left(\rho v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)\right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p) = 0}$

б) $(1)\cdot\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + (3)\cdot\rho \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + pv\right) = 0}$

(Мы строим разрывные решения, т.к. в некоторых ситуациях не существует однозначного решения. На лекциях по гидродинамике это была задача о поршне, вдвигаемом в газ)



поверхность разрыва. $\Delta x \to 0,\ \Delta t \to 0 \Rightarrow x_1 \to x_2,\ t_1 \to t_2$, обозначим $\frac{dx}{dt} = D$ — скорость движения разрыва

Теперь перейдем к интегральным соотношениям:

1) $\int_{x_1}^{x_2}(\rho(t_2) - \rho(t_1))dx + \int_{t_1}^{t_2}(\rho v|_{x_2} - \rho v|_{x_1})dt = 0$ {по 1 т. о среднем} $\Rightarrow [\rho(x^*, t_2) - \rho(x^*, t_1)]\Delta x +$

[сравните с (1)]

$+ [\rho(x_2, t^*)v(x_2, t^*) - \rho(x_1, t^*)v(x_1, t^*)]\Delta t = 0 \Rightarrow (\rho_1 - \rho_0)\overbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}^{D} + \rho_0 v_0 - \rho_1 v_1 = 0$

Пусть $u_1 = D - v_1,\ u_0 = D - v_0$ — скорости движения относительно разрыва $\Rightarrow \boxed{\rho_1 u_1 = \rho_0 u_0}$ — I соотношение Гюгонио и ~~зако~~ з. сохр. потока массы

2) $\int_{x_1}^{x_2}[\rho v|_{t_2} - \rho v|_{t_1}]dx + \int_{t_1}^{t_2}(\rho v^2 + p)\Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0 \Rightarrow \rho v\Big|_{t_1, x^*}^{t_2, x^*}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + (\rho v^2 + p)\Big|_{t^*, x_1}^{t^*, x_2} = 0 \Rightarrow$

[сравните с а)]

$\Rightarrow (\rho_1 v_1 - \rho_0 v_0)D + (\rho_0 v_0^2 + p_0) - (\rho_1 v_1^2 + p_1) = \rho_1 v_1(D - v_1) - p_1 - \rho_0 v_0(D - v_0) + p_0 = 0 \Rightarrow \rho_1 v_1 u_1 - p_1 =$

$= \rho_0 v_0 u_0 - p_0 \Rightarrow \rho_1 u_1(D - u_1) - p_1 = \rho_0 u_0(D - u_0) - p_0 \Rightarrow \boxed{\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_0 u_0^2 + p_0}$ — II соотнош. Гюгонио.

[$\rho_1 u_1 D = \rho_0 u_0 D$ по I соотнош.]

главное получить ↑ (преобразования могут быть другими)

3) $\int_{x_1}^{x_2}\rho\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\Big|_{t_1}^{t_2}dx + \int_{t_1}^{t_2}\left(\rho v\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + pv\right)\Big|_{x_1}^{x_2}dt = 0 \Rightarrow \rho\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\Big|_{t_1, x^*}^{t_2, x^*}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\rho v\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + pv\right)\Big|_{t^*, x_1}^{t^*, x_2} = 0$

[б)]

$\Rightarrow D\left(\rho_1\left(\varepsilon_1 + \frac{v_1^2}{2}\right) - \rho_0\left(\varepsilon_0 + \frac{v_0^2}{2}\right)\right) + \rho_0 v_0\left(\varepsilon_0 + \frac{v_0^2}{2}\right) + p_0 v_0 - \rho_1 v_1\left(\varepsilon_1 + \frac{v_1^2}{2}\right) - p_1 v_1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\ldots\} \Rightarrow \boxed{\rho_1 u_1\left(\varepsilon_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1}\right) = \rho_0 u_0\left(\varepsilon_0 + \frac{u_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0}\right)}$ — III соотнош. Гюгонио.

1) $\rho_0 u_0 = \rho_1 u_1 = m \neq 0 \Rightarrow$ ударная волна. По теореме Цемплена могут быть только ударные волны сжатия и повышения давления. (т.е. не существует УВ разрежения)

25 Автомодельные решения нелинейных ур-ний

~~Опр~~ ← Не нужно →

Решением типа бегущей волны называются решения вида $w(x,t)=W(\xi)$, где $\xi = x - \frac{\lambda}{k}t$, где $\frac{\lambda}{k}$ играет роль скорости распространения волны.

Автомодельными называются решения вида $w(x,t)=t^{\alpha}U(\xi)$, где $\xi = xt^{\beta}$. Профили этих решений в разные моменты времени получаются друг из друга преобразованием подобия (сжатие или растяжение).

Автомодельные решения существуют, если растяжение независимых и зависимой переменных по правилу $t=C\bar{t}$, $x=C^{k}\bar{x}$, $w=C^{m}\bar{w}$, $C=const>0$, при соответствующем выборе k и m эквивалентно тождественному преобразованию, т.е. исходное уравнение $F(x,t,w,w_x,w_t,w_{xx},w_{xt},w_{tt}\ldots)=0$ (1) в результате преобразования перейдет в точно такое же $F(\bar{x},\bar{t},\bar{w},\bar{w}_{\bar{x}},\bar{w}_{\bar{t}}\ldots)=0$ (2).

Д-во: $\exists\, w(x,t)$ — реш (1) $\Rightarrow \bar{w}=\bar{w}(\bar{x},\bar{t})$ — реш (2).

$w=t^{\alpha}u(\xi) \Rightarrow \bar{w}=\bar{t}^{\alpha}u(\bar{x}\bar{t}^{\beta})$ т.к. $\bar{t}=\frac{t}{C}$, $\bar{x}=\frac{x}{C}$, $\bar{w}=\frac{w}{C^m}$

$C^{-m}w = C^{-\alpha}t^{\alpha}u(C^{-k}xC^{-\beta}t^{\beta})$. Ур-ние (2) не зависит от C: $w=C^{m-\alpha}t^{\alpha}u(C^{-k}C^{-\beta}xt^{\beta}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} m-\alpha=0 \\ -k-\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=m \\ \beta=-k \end{cases} \Rightarrow$ автомод реш $\exists$ при таких α, β. ч.т.д.

Пример: р-ле ур-ние теплопроводности с нелинейным источником степенного типа: $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^n$ (*). Растяжение переменных преобразует ур-ние к виду: $C^{m-1}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = aC^{m-2k}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + bC^{mn}\bar{w}^n$. Приравнивание степеней C дает систему линейных алгебраических ур-ний для опред. k и m:

$m-1=m-2k=mn$, которое имеет ед. реш: $k=\frac{1}{2}$; $m=\frac{1}{1-n}$.

Учитывая это находим автомод. реш: $w=t^{1/(1-n)}U(\xi)$, $\xi=xt^{-1/2}$.

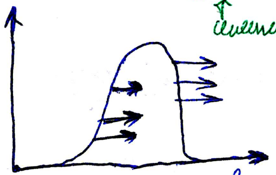
Подставляя в (**) переходим к ОДУ: $aU''_{\xi\xi}+\frac{1}{2}\xi U'_{\xi}+\frac{1}{n-1}U+bU^n=0$.

(26) Уравнение КдФ, его интегралы, преобразование

Опр: если в $Lu = \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{i_1 \dots i_n} A^{k}_{i_1 \dots i_m} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = f(x)$ зависит не только от $x=(x_1 \dots x_n)$ (а, например, еще и от u), то ур-ние назыв. нелинейным

длинные волны $\sqrt{g(a+h)} = c_0$ амплитуда глубина

$u(x,t) = f(x-ct)$ решение типа „бегущей волны"



Ф-ция $\eta(x,t)$, описывающая процесс распределения длинных волн на поверхности воды, приближенно удовлетворяет ур-нию:

В лекциях $\eta_t + (1+\frac{3}{2}\varepsilon\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\delta^2}{6}\eta_{xxx} = 0$, $\delta = \frac{h}{l}$, $\varepsilon = \frac{a}{h} \ll 1$

$\eta_t + c_0(1+\frac{3}{2h_0}\eta)\eta_x + \frac{h_0^2}{6}c_0\eta_{xxx} = 0$, где h_0 — глубина жидкости, $c_0 = \sqrt{gh_0}$ — скорость длинных волн на мелкой воде

Сделаем замену $\Rightarrow u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ (*) — канонический вид ур-ния Кортевега де Фриза

$u(\pm\infty,t)=0,\ u_x(\pm\infty,t)=0,\ u_{xx}(\pm\infty,t)=0.$

Св-во: наличие у ур-ния ∞ числа законов сохранения (интегралов движения)

на мелкой воде $a \ll h \ll l$

1) интеграл по пр-ной переменной:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t dx + 6\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} uu_x dx}_{=0 \text{ по } (*)} + \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xxx} dx}_{=0 \text{ по } (*)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u dx = 0 \Rightarrow \boxed{I_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,dx = const}$$

2) (*) $\cdot 2u(x,t)$ и интегрир. по пространственной переменной:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2uu_t dx + 6\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2u^2u_x dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2uu_{xxx} dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2uu_t dx + 6\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2\left(\frac{u^3}{3}\right)_x dx}_{0 \text{ (по *)}} + \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2uu_{xxx} dx}_{0 \text{ по } (*)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)\,dx = const}$$

3) (*) $\cdot (u^2 + 2u_{xx})$ и интегрир:

$$\boxed{I_4 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [u^3 - \tfrac{1}{2}u_x^2]\,dx = const}$$

Солитонные решения:

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, & t>0 \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Реш. з. Коши (с $u_0 = -\frac{2}{ch^2 x}$) м.б. получено методом обратной задачи рассеивания:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}\varkappa \frac{2}{ch^2[\frac{1}{2}\varkappa(x-x_0) - \frac{\varkappa^3}{2}t]}$$ $[\varkappa = 2,\ x_0 = 0$ для $u_0 = -\frac{2}{ch^2 x}$

Решение такого вида называют солитоном. Они описывают бегущие волны ~~формы~~ неизменной формы

Опр: солитонами называют такие решения нелин ур-ний, которые имеют вид бегущей волны (уединенной) взаимодействующих таким образом, что после взаимодействия они сохраняют неизменной свою форму, получая приращение лишь в фазах.

Преобразование Миуры – Гарднера

$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$ – ур-ние КдФ

Преобразование Миуры: $u = v_x + v^2$ (*) u – реш. ур-ния КдФ
v – реш. ур-ния МКдФ

Введем обозначение: $K(v) = v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} = 0$ $\Rightarrow P(u) = (2v + \frac{\partial}{\partial x})K(v)$

$P(u) = u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$

Следующ. преобразование: $u = w + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2$ (**), ε – параметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow P(u) = (1 + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon^2 w)G(w)$, где

$G(w) = w_t - 6(w + \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx} = 0$ – ур-ние Гарднера (1)

$G(w)$ можно записать в виде закона сохран: $w_t + (-3w^2 - 2\varepsilon^2 w^3 + w_{xx})_x = 0$

Идея состоит в том, чтобы разложить в степенной ряд w по малому параметру ε: $w = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j$ (2)

Знач w_j находятся путем рекуррентного решения (**):

$w_0 = u$, $w_1 = -u_x$, $w_2 = u_{xx} - u^2$ и т.д.

Подставим (2) в (1) и, приравнивая одинак. степени ε, находим

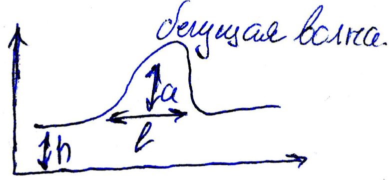
$O(\varepsilon^0): (w_0)_t = (3w_0^2 - w_{0xx})_x$

$O(\varepsilon^1): (w_1)_t = (6w_0^2 w_1 - w_{1xx})_x$

$O(\varepsilon^2): (w_2)_t = (3w_1 + 6w_0w_2 + 2w_0^2 - w_{2xx})_x$

Замеч: ЗС, соотв нечетным степеням ε, получают как производные законов четных степеней.

(27) Вывод уравнения КдФ



Р-м длинные волны $\Rightarrow c = \sqrt{g(a+h)}$

скорость волны, амплитуда, глубина

Уединенные волны проходят через друг друга без какого-либо изменения (волны-солитоны)

Пр-м, что жидкость несжимаема ($\rho = const$) $\Rightarrow div\,\vec{u} = 0$ (1) — ур-ние неразрывности.

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p = \vec{g}$ (2) — ур-ние движения с гравитацией.

Пусть в первоначальный момент времени жидкость покоится или поток однороден, тогда будет безвихревой процесс $\boxed{\vec{w} = rot\,\vec{u}} = 0 \Rightarrow \vec{u} = grad\,\varphi \Rightarrow div\,grad\,\varphi = \Delta\varphi = 0$ (4)

$\vec{u} \cdot rot\,\vec{u} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u}^2)$ (3) $\Rightarrow (2) \rightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \vec{u}^2) + \frac{\nabla p}{\rho_0} + \vec{g} = 0$, проектируем по z и исп $\vec{u} = grad\,\varphi$ $\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{p - p_0}{\rho_0} + g z = 0 \ (5)}$, где p_0 — давление на пов-ти жидкости со стороны атмосферы.

Поверхность раздела — пов-ть, кот. не пересекают частицы жидкости.

Пусть $f(x, y, z, t)$ — опис пов-ть раздела.

Условие непротекания: компонента скорости жидкости, нормальная к поверхности раздела = норм. комп. скорости пов-ти раздела. $\boxed{u_1 f_x + v f_y + u_2 f_z + f_t = 0 \ (6)}$

Пусть $\vec{u} = (u_1, v, u_2) \Rightarrow$ усл. непротек: $\frac{u_1 f_x + v f_y + u_2 f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} = -\frac{f_t}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}$

Поверхность раздела через отклонение от положения равновесия: $z = \eta(x, y, t) + h \Rightarrow$
$\Rightarrow f = h + \eta(x, y, t) - z$, подставим в (6): $\eta_t + u_1\eta_x + v\eta_y = u_2$. Будем считать, что по y возмущений нет $\Rightarrow \eta_t + u_1\eta_x = u_2$ (7)

Получим граничные условия

Пусть $\tilde{\varphi}(x, z, t)$ — значение потенц. скорости на поверхности

Тогда $u_1 = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}$; $u_2 = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z}$ (7) $\rightarrow \tilde{\varphi}_z = \eta_t + \eta_x \tilde{\varphi}_x$ (7.1) — кинематическое граничное условие

Будем считать, что на поверхности давл жидкости = давл атмосферы.

запишем (5) для поверхности: $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{(\nabla\tilde{\varphi})^2}{2} + gz = 0$, продиф-ем по x:

$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + g\eta_x = 0$ (8) Пусть наше дно соотв. границе жидкости $z = 0$ (плоское и горизонтальное) $\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0 \ (9)}$ — непротекание через дно

Задача для потенциала скорости

$$\begin{cases} \Delta\varphi=0 \\ \eta_t+u_1\eta_x=u_2 \\ u_{1_t}+u_1u_{1_x}+u_2u_{2_x}+g\eta_x=0 \\ \varphi_z|_{z=0}=0 \end{cases}$$

— задача о нелин. волнах на пов-ти воды.

$\eta_t+u_1\eta_x=u_2$, $u_{1_t}+u_1u_{1_x}+u_2u_{2_x}+g\eta_x=0$ — условие на верхн. границе

$\varphi_z|_{z=0}=0$ — условие на нижней гр.

Р-м длинные волны на мелкой воде: $a \ll h \ll l$ или все-таки δ

Введем обозначения $\delta=\frac{h}{l}\ll 1$; $\varepsilon=\frac{a}{h}\ll 1$. Будем искать решение в виде $\varphi(x,z,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x,t)\cdot z^n$, $z\in[0,z]$. При подстановке $\Delta\varphi=0$ получим: $\varphi_{n_{xx}}+(n+2)(n+1)\varphi_{n+2}=0$. Из (9) $\mapsto \varphi_1=0 \Rightarrow \varphi_{2k+1}=0$. Тогда $\varphi(x,z,t)=\varphi_0(x,t)-$

$$-\frac{z^2}{2}\varphi_{0_{xx}}+\frac{z^4}{24}\varphi_{0_{xxxx}}+\ldots$$

$$\begin{bmatrix} u_1=\varphi_x=f-\frac{z_1^2}{2}f_{xx}+ \\ u_2=\varphi_z=-z_1f_x+\frac{z_1^3}{6}f_{xxx}+\ldots \end{bmatrix} (10),$$ где $f(x,t)=\frac{\partial\varphi_0(x,t)}{\partial x}$ (11). Сделаем замену:

$x=lx'$, $t=\frac{a}{c_0}t$, $c_0=\sqrt{gh}$, $\eta=a\eta'$, $u_1=\varepsilon c_0u_1'$, $u_2=\varepsilon\delta c_0u_2$, $f=\varepsilon c_0f'$, $z_1=h(1+\varepsilon\eta')$

[Число Струхаля: $Sh=\frac{fL}{V}=\frac{L}{T\cdot V}$; f — частота процесса, L — лин. размер, V — скорость потока]

характерные

безразмерная

критерий подобия нестац. течений.

[Далее будем писать без штрихов] Перепишем (10) в новых переменных:

$$\boxed{\begin{aligned} u_1&=f-\frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (12) \\ u_2&=-(1+\varepsilon\eta)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\delta^2}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad (13) \end{aligned}}$$

Подставим в (7) и (8) $\begin{cases} u_2=\eta_t+\varepsilon\eta_xu_1 \\ u_{1_t}+\varepsilon u_1u_x+\eta_x=0, \end{cases} \Rightarrow$

подставим в (12) и (13)

$\Rightarrow$ получим
$$\begin{cases} \frac{\partial\eta}{\partial t}+\varepsilon f\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}+\varepsilon\eta\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\delta^2}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \\ \frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}+\varepsilon f\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial t}=0 \end{cases} \quad (*)$$

Нужно решить (*)! Если ε и $\delta=0 \Rightarrow$ получим лин. систему $\Rightarrow f$ и η удовл. волн. ур-нию.

Будем решать (*), предположив, что $f=\eta+\varepsilon f^{(1)}+\delta^2f^{(2)}$ (разложение по малым параметрам)

Вычтем из 1-го 2-е: $\varepsilon\left[\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}+\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}\right]+\delta^2\left[\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x}-\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t}-\frac{1}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial t}\right]=0$

Т.к. ε и δ независимы $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}+\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x}-\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t}-\frac{1}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial t}=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}=-\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x}$, $\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t}=-\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x} \Rightarrow f^{(1)}=-\frac{\eta^2}{4}$;

$f^{(2)}=\frac{1}{3}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$. Тогда: $\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{3}{2}\varepsilon\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\delta^2}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0$ Введем $\tau=x+t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{u_\tau+6uu_x+u_{xxx}=0} \text{ — ур-ние КдФ}$$

(28) Уравнение Уизема.

Если длина волны сравнима с глубиной бассейна H, то закон дисперсии в этом случае имеет вид: $\omega = \sqrt{gk \cdot th(kH)}$ (1), k - волновое число

$$th(x) = \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}$$

В случае длинных волн, разлагая соотношение (1) в ряд, получаем

$$\omega = \sqrt{gH}\left(k - \frac{k^3H^2}{6} + \dots\right)$$

Если ограничиться лишь первым членом, т.е. пренебречь дисперсией, то получим уравнение простой волны $u_t + u_{xx} = 0$. Учет двух членов приводит к уравнению КдФ [$u_t + uu_x + 6u_{xxx} = 0$]. (Которое вместо опрокидывания предсказывает появление солитонов ⇒ нужна более точная аппроксимация закона дисперсии, ⇒ чтобы получить уравнение, которое бы имело решение как в виде уединенных волн, так и опрокидывающиеся.

Т.к. дисперс. соотношение: $\omega = c(k)k$ (2), разложим $c(k)$ - фазовую скорость в интеграл Фурье: $c(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) e^{-ik\xi} d\xi$, $K(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} c(k) e^{ikx} dk$,

подставляя это выражение в (2) и выполняя обратное преобразование Фурье перейдем к $u_t + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi) u_\xi(\xi,t) d\xi = 0$, дополняя его нелинейными членами, получим:

$$\boxed{u_t + u_{xx} + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi) u_\xi(\xi,t) d\xi = 0 \text{ — ур-ние Уизема}}$$

Проблема в том, что в общем случае ядро $K(x)$ не удается вычислить в явном виде. Однако оно обладает след. свойствами: $K(x) = K(-x)$, $K(x) \sim (2\pi x)^{-1/2}$ при $x \to 0$, $K(x) \sim \left(\frac{\pi^2 x}{2}\right)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{\pi x}{2}}$ при $x \to \infty$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x)dx = 1$.

Уизем предложил использовать след. аппроксимацию ядра:

$K(x) = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-\frac{\pi|x|}{2}}$, что довольно точно описывает его при $x \to \infty$